UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN, 2013-2014

Ejercicios 1 a 10

1. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & \ell & m & n & o \\ p & q & r & s & t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

se pide escribir, cuando sea posible, el producto de $\mathbf{A}$ por una de las otras dos matrices para obtener la combinación lineal de:

1. Las columnas de $\mathbf{A}$ con coeficientes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
2. Las columnas de $\mathbf{A}$ con coeficientes y_1, y_2, y_3, y_4.
3. Las filas de $\mathbf{A}$ con coeficientes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
4. Las filas de $\mathbf{A}$ con coeficientes y_1, y_2, y_3, y_4.

Trasponer alguna de las matrices si es preciso.

2. Escribir el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \phantom{{}+x_4} + 5\,x_5 &= 1 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 + 8\,x_5 &= 0 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 5\,x_5 &= 7 \end{aligned} \right.$$

en la forma «combinación lineal de columnas» y en la forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. A partir de las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en tres sistemas independientes. Escribir el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en la forma de combinación lineal de columnas de $\mathbf{A}$.

4. Calcular los productos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Utilizando productos y sumas de matrices, transformar la matriz

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

en:

1. La matriz
$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}.$$
2. La matriz
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$
3. La matriz
$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

6. Calcular el producto $\mathbf{AB}$ en la forma «columnas por filas», es decir,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \cdots$$

donde n es el número de columnas de $\mathbf{A}$ y el número de filas de $\mathbf{B}$.

Calcular también $\mathbf{AB}$ mediante «filas por columnas», «columna a columna» y «fila a fila».

7. Utilizando productos y sumas de matrices, obtener la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{a partir de las matrices} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

y viceversa. Obtener la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a partir de $\mathbf{A}$.

8. Multiplicando por una matriz, transformar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \end{bmatrix}$$

en otra matriz $\mathbf{B}$ donde:

1. Se ha suprimido la sexta fila de $\mathbf{A}$,

y 2. La tercera fila de $\mathbf{B}$ se obtiene sumando el producto de la segunda fila de $\mathbf{A}$ por p con el producto de la cuarta fila de $\mathbf{A}$ por q.

9. Multiplicar la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$$

10. A. Sea $\mathbf{e}_j = \mathbf{I}_n(\,:\,,\,j)$ la j-ésima columna de la matriz identidad $n \times n$. Calcular los productos

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j\,, \qquad \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\,, \quad \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j\,.$$

B. Determinar qué filas, columnas o matrices intervienen en el cálculo de:

1. La tercera columna del producto $\mathbf{AB}$.
2. La segunda fila de $\mathbf{AB}$.
3. El elemento $(3,4)$ del producto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$.
4. El elemento $(1,1)$ del producto $\mathbf{ABC}$.
5. Las filas $I = [3,4,5]$ y columnas $J = [2\!:\!9] = [2,3,\ldots,9]$ del producto $\mathbf{ABC}$.

C. Utilizar los vectores $\mathbf{e}_j$ para extraer de $\mathbf{A}$ la submatriz formada por sus filas $I = [i_1\,, i_2\,, \ldots\,, i_p]$ y columnas $J = [j_1\,, j_2\,, \ldots\,, j_q]$.